Παρατήρηση

$f: E \to \mathbb{R}$, E συμπαγής. Τότε η f παίρνει max και min

$f(E) = \mathbb{R}(f) \subseteq \mathbb{R}$, $f(E)$ συμπαγής. $f(E)$ κλειστό και φραγμένο

(E, ρ) συμπαγής μ.χ. $f: E \to E$ κ $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ $\forall x, y \in E$ με $x \neq y$

Ν.δ.ο. η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο

Απόδειξη

Θεωρώ $g(x) = \rho(x, f(x))$, $x \in E$ συνεχής (λόγω σύνθεσης συνεχών συναρτ.)

άρα g συνεχής $\wedge$ E συμπαγές $\Rightarrow (\exists x_0 \in E): g(x_0) = \min_{x \in E} g(x)$.

$y_0 = f(x_0)$ Υποθέτω ότι $x_0 \neq f(x_0)$.

$g(y_0) = \rho(y_0, f(y_0)) = \rho(f(x_0), f(y_0)) < \rho(x_0, y_0) = g(x_0) \Rightarrow$

$g(y_0) < g(x_0)$ ΑΤΟΠΟ γιατί $g(x_0) = \min_{x \in E} g(x)$ ΑΤΟΠΟ άρα η f

έχει σταθερό σημείο. Τώρα αρκεί ν.δ.ο. είναι και μοναδικό.

Υπενθύμιση

(E, ρ) συμπαγής $\Leftrightarrow$ $\forall$ ανοιχτή κάλυψη του E υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη

$\mathcal{C}$ κάλυψη του $E \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{C} = E$

$S \subseteq E$, S συμπαγές $\Leftrightarrow$ ο μετρ. υποχώρος S είναι συμπαγής

$S \supseteq X$ ανοιχτό εν $S \Leftrightarrow \exists Y \subseteq E$, Y ανοιχτό εν E κ $Y \cap S = X$

Πρόταση

$S \subseteq E$, S συμπαγές $\Leftrightarrow$ $\forall$ ανοιχτή εν E κάλυψη του S υπάρχει πεπερ. υποκάλυψη (*)

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω S συμπαγές και έστω $A_i, i \in I$ ανοιχτή εν E κάλυψη του S

$S \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. $\forall i \in I$ A_i ανοιχτό εν $E \Rightarrow (\forall i \in I): B_i = S \cap A_i$ ανοιχτό εν S

$S = S \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (S \cap A_i) = \bigcup_{i \in I} B_i$ με $B_i, i \in I$ κάλυψη του S, ανοιχτή εν S

$\xrightarrow{\text{συμπαγής}} (\exists J \subseteq I)_{\text{πεπερ.}}: S = \bigcup_{i \in J} B_i = \bigcup_{i \in J} (S \cap A_i) = S \cap (\bigcup_{i \in J} A_i) \Rightarrow S \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i$, J πεπερ.

($\Leftarrow$) Ισχύει το (*) κ θ.δ.ο. S συμπαγές. Έστω $B_i, i \in I$ ανοιχτή εν S κάλυψη του S

Τότε $S = \bigcup_{i \in I} B_i$, $(\forall i \in I): B_i = S \cap A_i$, A_i ανοιχτό εν E.

$S = \bigcup_{i \in I} (S \cap A_i) = S \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) \Rightarrow S \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \Rightarrow A_i, i \in I$ ανοιχτή εν E κάλυψη του S

$\xRightarrow{(*)} (\exists J \subseteq I)_{\text{πεπερ.}}: S \subseteq \bigcup_{i \in J} A_i \Rightarrow S = S = S \cap (\bigcup_{i \in J} A_i) = \bigcup_{i \in J} (\underbrace{S \cap A_i}_{B_i}) = \bigcup_{i \in J} B_i$

(E,ρ) $(x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, με $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = l$. $A=\{x_\nu : \nu\in\mathbb{N}\}\cup\{l\}$.
N.δ.ο. A συμπαγές.

Απόδειξη

Έστω $X_i, i\in I$ ανοιχτή εν E κάλυψη του A. $A=\bigcup_{i\in I} X_i$

$l\in A \Rightarrow l\in \bigcup_{i\in I} X_i \Rightarrow (\exists i_0\in I): l\in X_{i_0} \xRightarrow{X_{i_0}\text{ ανοιχτό}} (\exists \nu_0\in\mathbb{N})(\forall \nu\geq\nu_0): x_\nu\in X_{i_0}$

$$\left.\begin{array}{l} x_1\in X_{i_1} \\ x_2\in X_{i_2} \\ \dots \\ x_{\nu_0-1}\in X_{i_{\nu_0-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow C=\{X_{i_0}, X_{i_1}, \dots, X_{i_{\nu_0-1}}\}$$

$$\bigcup C = \underbrace{\bigcup_{k=0}^{\nu_0-1} X_{i_k}}\supseteq A$$

είναι μία πεπερασμένη υπακολουθία του συνόλου
άρα A συμπαγές

Παρατήρηση

Η συμπάγεια δεν είναι κληρονομική ιδιότητα (Γενικά)

Έστω A συμπαγές υποσύνολο ενός μ.χ. (E,ρ)
N.δ.ο. A' και $\bar{A}$ είναι συμπαγή

Απόδειξη

$x\in A' \Leftrightarrow (\forall r>0): \underline{B}(x,r)\cap A\neq\emptyset$

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ τυχούσα ακολουθία εν A'.

$(\forall \nu\in\mathbb{N}): \underline{B}(\alpha_\nu, \frac{1}{\nu})\cap A\neq\emptyset$, γιατί $\alpha_\nu\in A'$ άρα

$(\exists (\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν A και $\rho(\alpha_\nu,\beta_\nu)<\frac{1}{\nu}): \beta_\nu\in\underline{B}(\alpha_\nu,\frac{1}{\nu})\cap A$, $\nu\in\mathbb{N}$

$(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ και A συμπαγές $\Rightarrow \exists (\beta_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(\beta_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $\lim_{\nu\in\mathbb{N}}\beta_{k_\nu}=l\in A$

Θεωρούμε την $(\alpha_{k_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ υπακολουθία της $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$

$0\leq\rho(\alpha_{k_\nu},l)\leq\rho(\alpha_{k_\nu},\beta_{k_\nu})+\rho(\beta_{k_\nu},l)\leq\left(\frac{1}{k_\nu}+\rho(\beta_{k_\nu},l)\right)\longrightarrow 0$

άρα $\lim_{\nu\in\mathbb{N}}\alpha_{k_\nu}=l\in A'$ (επειδή A' είναι κλειστό)

άρα A συμπαγές

Ομοίως, η απόδειξη και για το $\bar{A}$

(80)

Άσκηση

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y=1 \ , \ 0\le x\le 1\}$ Ν.δ.ο. Α συμπαγές σύνολο

Λύση

• (Α κλειστό $\Leftrightarrow \forall (x_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ εν Α , συγκλίνουσα ισχύει $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu \in A$)

Θ.δ.ο. Α κλειστό

Έστω $(x_\nu, y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολ. εν Α $\Rightarrow x_\nu+y_\nu=1 \Rightarrow \lim(x_\nu+y_\nu)=1$ (1)

$\lim_{\nu\in\mathbb{N}}(x_\nu,y_\nu)=(l_1,l_2)\in\mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \lim_{\nu\in\mathbb{N}} x_\nu = l_1$ και $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} y_\nu = l_2$

όπως τότε το $\lim_{\nu\in\mathbb{N}}(x_\nu+y_\nu)=l_1+l_2$ (2)

από (1) κ (2) $\Rightarrow l_1+l_2=1 \Rightarrow (l_1,l_2)\in A$ άρα Α κλειστό.

• Βλέπουμε ότι $0\le x\le 1$ άρα και $0\le y=1-x\le 1$ άρα το Α είναι προφανώς φραγμένο υποσύνολο.

Άρα τελικά το Α συμπαγές